Technol. innov. j. (2024). Vol. 3 Núm. 1 págs. 7-18

Technological Innovations Journal

www.tijournal.science

ISSN 2955-8239 (En línea)

Editada por: Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi Perú

ARTÍCULO ORIGINAL

Programa de aplicación para resolver sistemas de ecuaciones no lineales

Application program to solve systems of nonlinear equations

求解非线性方程组的应用程序

Programa de aplicação para resolver sistemas de equações não lineares

Luis Venturo[1]
Universidad Hipócrates, Acapulco – Estado de Guerrero, México
Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi – Perú, Puno – Puno, Perú
https://orcid.org/0009-0000-3427-2977
lventuro@inudi.edu.pe (correspondencia)

Irenio Chagua-Aduviri
Universidad Nacional del Altiplano, Puno – Puno, Perú
https://orcid.org/0000-0002-5009-1268
ichagua@unap.edu.pe

Darssy Carpio
Universidad Hipócrates, Acapulco – Estado de Guerrero, México
Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi – Perú, Puno – Puno, Perú
https://orcid.org/0000-0002-8826-5980
dcarpio@inudi.edu.pe

DOI: https://doi.org/10.35622/j.ti.2024.01.001

Recibido: 12/10/2023 Aceptado: 10/01/2024 Publicado: 20/01/2024

PALABRAS CLAVE

convergencias, matrices, métodos numéricos, programa de aplicación, sistemas de ecuaciones no lineales.

RESUMEN. Introducción: Los programas de aplicación a las matemáticas han tenido un impacto significativo en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales y están impactando en diversas áreas. En una ecuación no lineal no siempre resulta fácil determinar su raíz o punto de convergencia, se tiene que analizar y restringir el comportamiento de sus funciones que lo conforman. **Objetivo:** Desarrollar un programa matemático para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, seleccionando el método más eficiente y presentando resultados que incluyan el análisis de convergencia y estabilidad de los métodos iterativos implementados. **Método:** Para resolver el sistema de tipo V(X)=0 se utilizó los métodos: Simple Iteración, Gradiente, Newton, Modificado de Newton, y Cuasi Newton. Para la elaboración del programa de aplicación se utilizó el lenguaje de programación Visual C++ 6.0 junto con las librerías de Matlab 6.5 para el cálculo de notaciones matemáticas. **Resultados:** Se desarrolló un programa de aplicación denominado SMENLI (Software Matemático para resolver ecuaciones No Lineales), que implementó diversos

[1] Doctor en Matemática por la Universidad Nacional de Trujillo, Perú.

métodos iterativos para resolver 20 sistemas de ecuaciones no lineales. De estos, 15 convergieron y 5 divergieron. Algunos no lograron converger debido al punto inicial proporcionado al programa, que utiliza un analizador léxico. Además, es importante recordar que no todos los sistemas de ecuaciones no lineales tienen una solución. **Conclusiones:** Se descubrió que los métodos de Newton y Newton Modificado son los más eficientes en términos de convergencia, destacando por su menor tiempo y número de iteraciones en comparación con otros métodos implementados. No obstante, en casos excepcionales con ciertos sistemas de ecuaciones no lineales, el método Cuasi Newton puede demostrar ser superior a los demás.

KEYWORDS

convergence, matrices, numerical methods, application program, nonlinear systems of equations.

ABSTRACT. Introduction: Application programs in mathematics have had a significant impact on solving nonlinear systems of equations and are impacting various areas. In a nonlinear equation, it is not always easy to determine its root or convergence point; one must analyze and restrict the behavior of the functions that comprise it. **Objective:** To develop a mathematical program to solve nonlinear systems of equations, selecting the most efficient method and presenting results that include the analysis of convergence and stability of the implemented iterative methods. **Method:** To solve the system of type V(X)=0, methods such as Simple Iteration, Gradient, Newton, Modified Newton, and Quasi-Newton were used. Visual C++ 6.0 programming language along with Matlab 6.5 libraries were used for the development of the application program for mathematical notations. **Results:** An application program named SMENLI (Mathematical Software for solving Nonlinear Equations) was developed, which implemented various iterative methods to solve 20 systems of nonlinear equations. Of these, 15 converged and 5 diverged. Some did not converge due to the initial point provided to the program, which utilizes a lexical analyzer. Additionally, it is important to remember that not all systems of nonlinear equations have a solution. Conclusions: It was found that the Newton and Modified Newton methods are the most efficient in terms of convergence, standing out for their shorter time and fewer iterations compared to other implemented methods. However, in exceptional cases with certain systems of nonlinear equations, the Quasi-Newton method may prove superior to others.

关键词

收敛、矩阵、数值方法、应用程序、非线性方程组。

抽象的。导言：数学应用程序对解决非线性方程组产生了重要影响，并正在影响各个领域。在非线性方程中，确定其根或收敛点并不总是容易；必须分析和限制组成其的函数的行为。**目标：**开发一个数学程序来解决非线性方程组，选择最有效的方法，并提供包括实施的迭代方法的收敛性和稳定性分析在内的结果。方法：为了解决V(X)=0类型的系统，采用了简单迭代、梯度、牛顿、修正的牛顿和拟牛顿等方法。为了开发应用程序，使用了Visual C++ 6.0编程语言以及Matlab 6.5库来计算数学符号。**结果：**开发了一个名为SMENLI（用于解决非线性方程的数学软件）的应用程序，该程序实施了各种迭代方法来解决20个非线性方程组。其中，15个收敛，5个发散。由于程序使用了词法分析器，一些未能收敛的是由于提供给程序的初始点。此外，重要的是要记住，并非所有的非线性方程组都有解。**结论：**发现牛顿和修正的牛顿方法在收敛方面最有效，以较短的时间和较少的迭代次数脱颖而出，与其他实施的方法相比。然而，在某些特定的非线性方程组中，拟牛顿法可能优于其他方法。

PALAVRAS-CHAVE

convergência, matrizes, métodos numéricos, programa de aplicação, sistemas de equações não lineares.

RESUMO. Introdução: Os programas de aplicação em matemática tiveram um impacto significativo na resolução de sistemas de equações não lineares e estão impactando várias áreas. Em uma equação não linear, nem sempre é fácil determinar sua raiz ou ponto de convergência; é necessário analisar e restringir o comportamento das funções que a compõem. **Objetivo:** Desenvolver um programa matemático para resolver sistemas de equações não lineares, selecionando o método mais eficiente e apresentando resultados que incluam a análise de convergência e estabilidade dos métodos iterativos implementados. **Método:** Para resolver o sistema do tipo V(X)=0, foram utilizados métodos como Iteração Simples, Gradiente, Newton, Newton Modificado e Quasi-Newton. Para o desenvolvimento do programa de aplicação, foi utilizado o Visual C++ 6.0 juntamente com as bibliotecas do Matlab 6.5 para o cálculo de notações matemáticas. **Resultados:** Foi desenvolvido um programa de aplicação chamado SMENLI (Software Matemático para resolver Equações Não Lineares), que implementou diversos métodos iterativos para resolver 20 sistemas de equações não lineares. Desses, 15 convergiram e 5 divergiram. Alguns não convergiram devido ao ponto inicial fornecido ao programa, que utiliza um analisador léxico. Além disso, é importante lembrar que nem todos os sistemas de equações não lineares têm solução. Conclusões: Descobriu-se que os métodos de Newton e Newton Modificado são os mais eficientes em termos de convergência, destacando-se por seu menor tempo e menos iterações em comparação com outros métodos implementados. No entanto, em casos excepcionais com certos sistemas de equações não lineares, o método Quasi-Newton pode ser superior aos outros.

1. INTRODUCCIÓN

Los programas de aplicación a las matemáticas han tenido un impacto significativo en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales V(X)=0. Desde los inicios de las matemáticas, que se originaron con el conteo para llevar registros financieros, hasta la formulación de conceptos matemáticos en la época de Aristóteles, ha habido un continuo desarrollo en esta disciplina (Gómez-Gómez et al., 2009; Vazquez, 2009).

En 1945, John Von Neumann inventó un ordenador que almacenaba en memoria instrucciones que indicaban a las unidades de cálculo lo que debían hacer. En 1948, se ejecutó el primer programa en una máquina llamada Baby en la Universidad de Manchester (Randell, 2017).

Las aplicaciones de las matemáticas en las ingenierías son un claro ejemplo de su impacto. La solución de sistemas de ecuaciones lineales se utiliza en todo el mundo para la optimización de procesos, simulación, cálculo de matrices de riesgo y determinación de factores de eficiencia (Andino Célleri et al., 2023). Los programas de aplicación a las matemáticas han evolucionado y se han utilizado para resolver sistemas de ecuaciones no lineales (Chávez Esponda et al., 2013). Además, hay varias áreas en las que los programas de aplicación a las matemáticas están teniendo un impacto significativo, como la inteligencia artificial (Grisales-Aguirre, 2018) que se utiliza para extraer datos de imágenes de satélite y dibujar mapas de áreas urbanas, industriales, agrícolas y forestales. Las ecuaciones no lineales tienen una relación directa con el procesamiento de datos y la tecnología digital, permitiendo representar sonidos e imágenes de manera que se pueden comprimir sin casi pérdida de calidad o eliminar el ruido que ha aparecido durante su obtención. Estas herramientas se utilizan en multitud de escenarios, como el procesamiento de imágenes médicas. Los programas educativos también están cambiando para adaptarse a las necesidades y expectativas de los estudiantes, es así que los programas de aplicación a las matemáticas de ecuaciones no lineales están impactando en diversas áreas que se utilizan en una variedad de

campos, incluyendo la medicina, la ingeniería, la física, entre otros. En el caso de las imágenes médicas, las ecuaciones no lineales pueden ser utilizadas para mejorar la calidad de las imágenes, lo que puede ayudar a los médicos a hacer diagnósticos más precisos (Serrano Rugel et al., 2020; Fernández et al., 2017). En optimización de procesos: la solución de sistemas de ecuaciones lineales es utilizada en todo el mundo para la optimización de procesos, simulación, cálculo de matrices de riesgo y determinación de factores de eficiencia (Chávez Esponda et al., 2013).

Para resolver sistema de ecuaciones no lineales definidas de $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, de aplicaciones singulares de la forma $\boldsymbol{V(X)=0}$, generalmente no siempre resulta fácil determinar su raíz o punto de convergencia, necesariamente se tiene que analizar y restringir el comportamiento de sus funciones, es decir no permite despejar, factorizar las ecuaciones, de manera tradicional para hallar la solución o raíz, ya sea con el desarrollo de manera manual o por el desarrollo de algún software

comercial que requiere de conocimientos de programación, haciéndose engorroso para el usuario y utilizando mayor tiempo en la solución, por lo que se desarrolló un programa de aplicación llamado SMENLI (Software Matemático de Ecuaciones No Lineales).

2. MÉTODO

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales $V(X) = 0$ de cualquier orden; se escoge el método iterativo que se desee trabajar; y se elige un punto inicial cualesquiera (por definición de punto fijo) o punto de convergencia, buscamos un punto tan próximo a la solución de una de las ecuaciones que lo conforman el sistema (Yurij, 1987).

A continuación, se describen los métodos iterativos siguientes:

Método de simple iteración

El método de iteración simple (Yurij, 1987; Ortega, 1970) es un algoritmo iterativo de la forma:

Resolver el sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas V(X) = 0. Es equivalente a aplicar el proceso iterativo a la aplicación definida como:

$$T(X) = X - \tau V(X), \tau \in (0{,}2m/l^2)$$

Entonces el problema viene a ser equivalente a encontrar puntos fijos de la aplicación **T**.

Para resolver el sistema (1), el método de iteración nos guía al siguiente algoritmo:

$$X_{k+1} = X_k - \tau \mathrm{V}(X_k) \quad , \quad X_{k+1} = T(X_k) \qquad \mathbf{(1)}$$

Para resolver Sistemas de ecuaciones no lineales que cumple ciertas condiciones:

Se escoge la constante τ del intervalo tal que $\tau \in (0, 2m/l^2)$, donde *m* es la monoticidad constante y *l* es la constante Lipchiziana. Así mismo se escoge X_* , $Y_* \in \mathbb{R}^n$ puntos cercanos al punto inicial dado X_0 , $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ para evaluar la Matriz del Sistema de ecuaciones (1); la norma de matrices $\|V(X_*) - V(Y_*)\|$ y el producto interno de matrices $\langle V(X_*) - V(Y_*) , X_* - Y_* \rangle$. De las desigualdades:

$$m\|X_* - Y_*\|^2 \leq \langle V(X_*) - V(Y_*), X_* - Y_* \rangle \quad y \quad \|V(X_*) - V(Y_*)\| \leq l \, \|X_* - Y_*\|$$

Se obtiene las constantes *m y l* respectivamente.

Método del gradiente

Sea el sistema (1); supongamos que las funciones V son reales continuamente diferenciables y la aplicación $U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\boldsymbol{U(X) = \sum_{i=1}^{n} [V(X)]^2 = \langle V(X), V(X) \rangle} \qquad \mathbf{(2)}$$

Considérese que el sistema (1) tiene únicamente una solución que es el punto del mínimo estricto de $U(X)$. El problema es hallar el mínimo de la función $U(X)$ en $\mathbb{R}^n$. Sea X una raíz de (1) y X_0 su aproximación entonces se tiene el método del gradiente (Burden & Faires, 2011; Demidovich, 1985) como un algoritmo iterativo de la forma:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla U(X_k) \quad \forall \; k = 0, 1, 2 \qquad \mathbf{(3)}$$

Que resuelve sistemas de ecuaciones no lineales donde α_k es constante determinado por las condiciones: si $X_0 \in \mathbb{R}^n$ punto inicial elegido y muy cercano a la solución de una de las ecuaciones que conforman el sistema (3.1) donde $\langle V(X_0), W(X_0)\, W^T(X_0)V(X_0)\rangle$ es el producto interno de matrices y $\|W(X_0)\, W^T(X_0)V(X_0)\|^2$ es la norma de matrices cuadradas, entonces hallaremos el gradiente $\nabla U(X_0) = W^T(X_0)V(X_0)$ tal que:

$$\alpha_0 = \frac{\langle V(X_0), W(X_0)\, \nabla U(X_0)\rangle}{2\|W(X_0)\, W^T(X_0)V(X_0)\|^2}$$

Este método del gradiente se utiliza para encontrar el mínimo de una función, y se basa en la idea, que el gradiente de una función apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función. MÉTODO DE NEWTON

El método de Newton es un método iterativo (Burden & Faires, 2011; Yurij, 1987; Yamamoto, 2000) de la forma:

$$X_{k+1} = X_k - [V_x^T(X_k)]^{-1} V(X_k) \quad \forall \; k = 0, 1, 2 \ldots \qquad \mathbf{(4)}$$

Que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones no lineales cumpliendo las condiciones siguientes: escogiendo un punto inicial cualesquiera $X_0 \in \mathbb{R}^n$ próximo a la solución de una de las ecuaciones que lo conforman el sistema y evaluamos a la matriz $V(X_0)$ como sus matrices jacobianas (Abramov & Yukhno, 2015) $V_x^T(X_0) = W^T(X)$, $[V_x^T(X_0)]^{-1}$ y su producto entre ellas $V(X_0)\ [V_x^T(X_0)]^{-1}$ para luego reemplazamos en (4).

Método modificado de Newton

El método modificado de Newton es un método Iterativo (Burden & Faires, 2011; Yurij, 1987) de la forma:

$$\boldsymbol{X_{k+1} = X_k - \alpha_0 P_k} \quad \forall \; \boldsymbol{k = 0, 1, 2} \ldots \qquad \mathbf{(5)}$$

Con α_k por determinar por condiciones dadas, y poder resolver el sistema de ecuaciones no lineales (Ortega, 1970).

En efecto: Sea $X_0 \in \mathbb{R}^n$ punto inicial tan cercano a la solución de una de las ecuaciones que lo conforman el sistema $V(X) = 0$, y evaluamos a las matrices: $V(X_0\,)$, $V(X_0 + P_0)$, $V_x^T(X_0) = W^T(X_0)$ (Jacobianas) y $[V_x^T(X_0)]^{-1}$ así como al producto $P_0 = -\,[V_x^T(X_0)]^{-1}\, V(X_0)$ además se tiene que determinar ε / $\varepsilon \in (0, min\{1, r\})$ $\forall \; r > 0$, si $r = 1$ entonces

$$\|V(X_k + \lambda_k P_k)\|^r \leq \left(1 - \varepsilon\lambda^i\right)\|V(X_k)\|^r \;\; si \quad i = 0 \quad \forall\, \lambda \epsilon\, (0{,}1)$$

Si $\alpha_0 = 1$, cumple que $\varepsilon \in (0, min\{1, r\})$ $\forall \; r > 0$ luego tenemos que:

$$\alpha_k = Arg\, \min_i \left\| V(X_k + \lambda^i P_k) \right\| \quad \forall \;\; i \in Z^+$$

Método cuasi Newton (primer método de Broyden)

El método cuasi-Newton (Burden & Faires, 2011; Yurij G. Evtushenko, 1987) (Martínez, 2000)es un algoritmo iterativo de la forma:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(\Delta X_k - H_k \Delta V_k)\Delta X_k^T H_k}{\langle \Delta V_k\ ,\ \ H_k^T \Delta X_k \rangle} \quad \forall\ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \mathbf{(6)}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales que asume las condiciones siguientes:

Sea $X_0 \in \mathbb{R}^n$: Punto inicial tan próximo a la solución de una de las ecuaciones no lineales que lo conforman el sistema. Entonces evaluamos las matrices $V(X_0)$, $V_x^T(X_0) = W^T(X_0)$ y $H_0 = [V_x^T(X_0)]^{-1}$ (Jacobianas) y hallamos el algoritmo de iteración $X_1 = X_0 - H_0\, V(X_0)$. Además, se evalúan las matrices $V(X_1)$, $\Delta V_0 = V(X_1) - V(X_0)$ y $\Delta X_k^T = (X_{k+1} - X_k)^T$, $\forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Elaboración del programa de aplicación

Para la elaboración del programa de aplicación que resuelva el sistema de ecuaciones no lineales haciendo uso de teorías matemáticas de cada uno de los métodos descritos se ha utilizado el lenguaje de programación Visual C++ 6.0 junto con las librerías de Matlab 6.5 para el cálculo de sistemas complejos y notaciones matemáticas (Páez-Logreira et al., 2015). Para que las ecuaciones matemáticas sean interpretadas en el programa de aplicación ha sido necesario del uso de un analizador léxico y sintáctico para validar y calcular los valores numéricos de una ecuación no lineal (Kelley, 2018) dada en sus distintas formas en general, tales como las expresiones trigonométricas, exponenciales, la derivada de orden parcial, la inversa de una matriz de orden $n \times n$, así como leer y agrupar la cadena de caracteres que representa el sistema de ecuaciones, identificar símbolos, eliminar espacios en blanco y crear identificadores (*tokens*) intermedios. En Matlab se utilizó *C++ Math Library* para utilizar los operadores y funciones en el componente evaluador de expresiones, tales como boléanos, trigonométricas, y funciones de aproximación numérica (Rheinboldt, 2000).

Operadores: suma(+), resta(-), multiplicación(*), división(/) y exponencial(^).

Funciones: acos, asin, atan, cos, cosh, log, log10, sin, sinh, sqrt, tan y tanh.

Para resolver la ecuación matemática ("enumerada como 7") ha sido necesario utilizar el evaluador de ecuaciones matriciales, representando así para la variable *x* con *x1*, para la variable *y* con *x2*, para la variable *z* con *x3*, hasta el orden *xn*. El número de iteraciones se ha limitado a 999 para cada método, utilizando una secuencia finita de operaciones no ambiguas en un tiempo finito (algoritmo).

$$V(X) = \begin{cases} F1: 3x - \cos(yz) - \frac{1}{2} = 0 \\ F2: x^2 - 81(y + 0.10)^2 + senz + 1.06 = 0 \\ F3: e^{-xy} + 20z + \frac{(10\pi - 3)}{3} = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

F1: *3*x1 - cos(x2*x3) - 1/2*

F2: *x1^2 - 81*(x2 + 0.10)^2 + sin(x3) + 1.06*

F3: *e^(-x1*x2) + 20*x3 + (10*pi - 3)/3*

Technol. innov. j. Vol. 3. Núm. 1 (2024) págs. 7-18

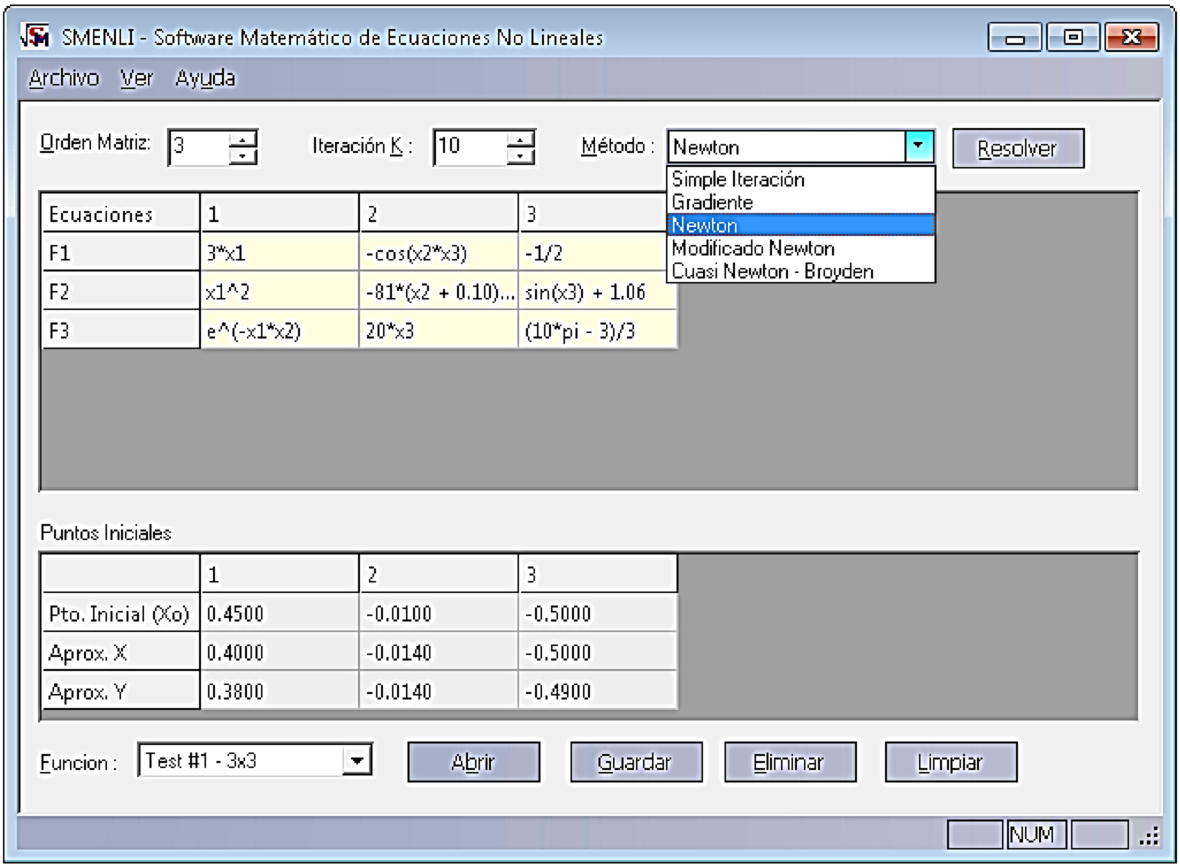
3. RESULTADOS

Se desarrolló un programa de aplicación llamado SMENLI (Software Matemático de Ecuaciones No Lineales), cuya pantalla principal o interfaz del programa se muestra en la Fig. 1. Fue implementado con diversos métodos iterativos, y se utilizó para resolver 20 sistemas de ecuaciones no lineales. De estos, 15 convergieron y 5 divergieron. Algunos no lograron converger debido al punto inicial proporcionado al programa, que utiliza un analizador léxico. Además, es importante recordar que no todos los sistemas de ecuaciones no lineales tienen una solución.

En la Figura 1 se muestra la pantalla principal, en la cual es necesario los datos de entrada como: el orden de la matriz, el número de iteraciones, el método con la cual se desea resolver, las ecuaciones del sistema no lineal, un punto inicial y puntos de aproximación.

Figura 1

Interfaz del programa antes de introducir un sistema de ecuaciones no lineales.



Para resolver la ecuación (7) de orden 3, con un punto $X_0 = (0.4500, -0.0100, -0.5000)^t$ y los puntos de aproximación (solo para el método de simple iteración) $X = (0.4000, -0.0140, -0.5000)^t$ y $Y = (0.3800, -0.0140, -0.4900)^t$.

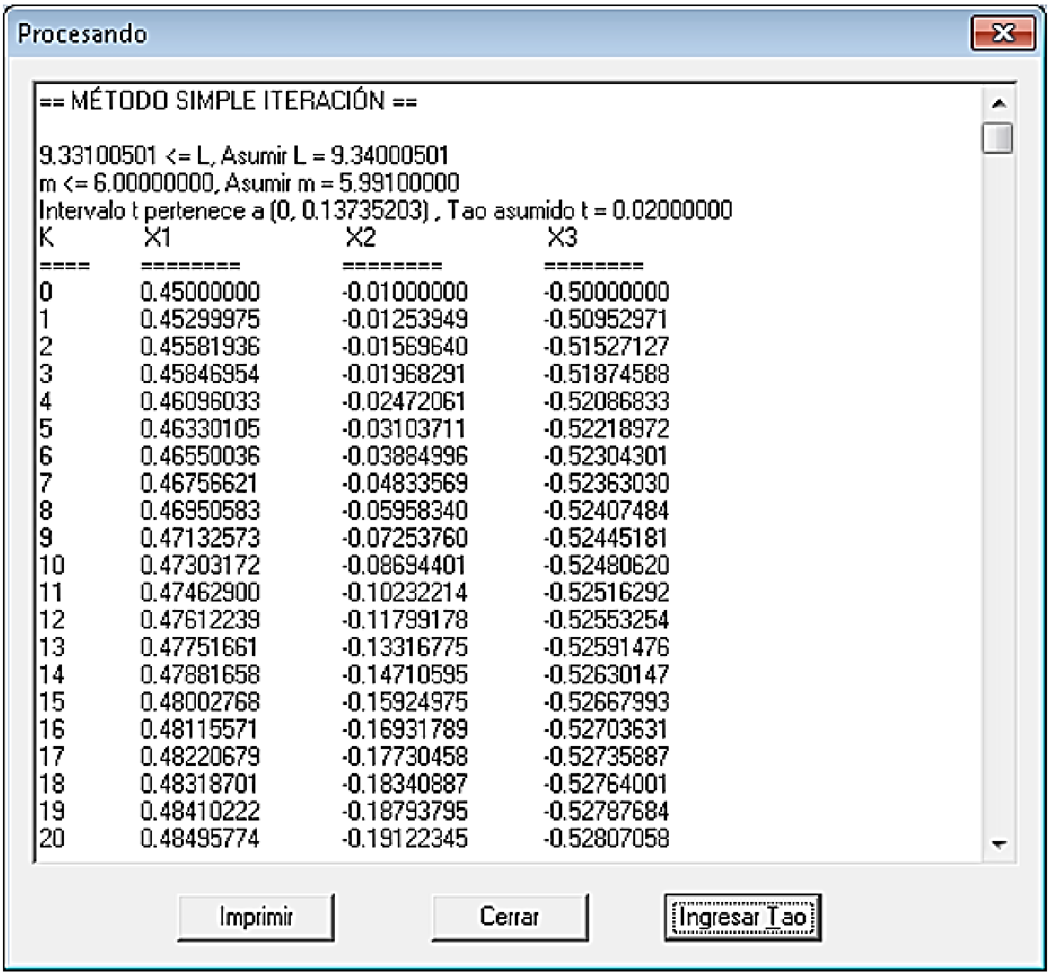
En la figura 2 muestra el resultado de las iteraciones según los datos ingresados y para un método dado, obteniéndose la convergencia aproximada a la solución en el paso iterativo 249, teniéndose como raíz $X_{249} = (0.49814468, -0.19960589, -0.52882598)$, tal que $V(X) = (0, 0, 0)$.

Luis Venturo; Irenio Chagua-Aduviri; Darssy Carpio

En el programa de aplicación también se agregó la funcionalidad de guardar las funciones para luego ser utilizados sin volver a ingresar los datos.

Figura 2

Resultado de las iteraciones


Procesando

== MÉTODO SIMPLE ITERACIÓN ==

9.33100501 <= L, Asumir L = 9.34000501
m <= 6.00000000, Asumir m = 5.99100000
Intervalo t pertenece a (0, 0.13735203) , Tao asumido t = 0.02000000

K	X1	X2	X3
====	========	========	========
0	0.45000000	-0.01000000	-0.50000000
1	0.45299975	-0.01253949	-0.50952971
2	0.45581936	-0.01569640	-0.51527127
3	0.45846954	-0.01968291	-0.51874588
4	0.46096033	-0.02472061	-0.52086833
5	0.46330105	-0.03103711	-0.52218972
6	0.46550036	-0.03884996	-0.52304301
7	0.46756621	-0.04833569	-0.52363030
8	0.46950583	-0.05958340	-0.52407484
9	0.47132573	-0.07253760	-0.52445181
10	0.47303172	-0.08694401	-0.52480620
11	0.47462900	-0.10232214	-0.52516292
12	0.47612239	-0.11799178	-0.52553254
13	0.47751661	-0.13316775	-0.52591476
14	0.47881658	-0.14710595	-0.52630147
15	0.48002768	-0.15924975	-0.52667993
16	0.48115571	-0.16931789	-0.52703631
17	0.48220679	-0.17730458	-0.52735887
18	0.48318701	-0.18340887	-0.52764001
19	0.48410222	-0.18793795	-0.52787684
20	0.48495774	-0.19122345	-0.52807058

Imprimir Cerrar Ingresar Tao

Se hizo la prueba de resolver las ecuaciones no lineales en cada uno de los métodos, en un total de 20 sistemas de ecuaciones no lineales que se encuentran en el Anexo 1, de las cuales se encontró que en su mayoría sí converge a la solución, excepto en algunos métodos que no converge a la solución, cabe indicar que el tipo de solución a encontrar es de acuerdo al punto inicial más cercano a la solución que se le asigne. En la Tabla 1 se puede apreciar que para la ecuación matemática 1 (Ecuación 1) el método de Simple Iteración encontró una solución óptima en la iteración número 249, para el método Gradiente en la iteración número 158, para el método Newton en la iteración 3, para el método Modificado Newton en la iteración 3 y para el método Cuasi Newton en la iteración 4.

Technol. innov. j. Vol. 3. Núm. 1 (2024) págs. 7-18

Luis Venturo; Irenio Chagua-Aduviri; Darssy Carpio

Tabla 1

Soluciones encontradas en las ecuaciones.

Nro.	Simple iteración	Gradiente	Newton	Modificado Newton	Cuasi Newton
Ecuación 1	249	158	3	3	4
Ecuación 2	No converge	No converge	No converge	No converge	No converge
Ecuación 3	143	619	6	6	9
Ecuación 4	No converge	8	3	3	5
Ecuación 5	No converge	532	20	20	8
Ecuación 6	109	128	3	3	5
Ecuación 7	No converge	No converge	27	27	123
Ecuación 8	118	72	3	3	6
Ecuación 9	No converge	No converge	47	47	65
Ecuación 10	148	45	6	6	10
Ecuación 11	No converge	No converge	No converge	No converge	No converge
Ecuación 12	0	132	10	10	14
Ecuación 13	No converge	No converge	No converge	No converge	No converge
Ecuación 14	806	No converge	6	6	13
Ecuación 15	No converge	No converge	3	3	7
Ecuación 16	No converge	No converge	3	3	4
Ecuación 17	0	37	5	5	8
Ecuación 18	No converge	No converge	No converge	No converge	No converge
Ecuación 19	0	59	9	9	14
Ecuación 20	No converge	No converge	No converge	No converge	No converge

El programa de aplicación no converge para algunas ecuaciones, debido al punto inicial dado y el número de iteraciones establecidas para el programa.

4. DISCUSIÓN

La necesidad de resolver sistemas de ecuaciones no lineales se hace indispensable (Acevedo et al., 2008) al ser complejos (Ovalle Cerquera et al., 2020), que permitan aproximar de forma eficiente las soluciones (Cumsille et al., 2010; Solís Zúñiga et al., 2021; Centeno & Niño, 2009), entre los métodos numéricos que resuelven una ecuación no lineal es el método de Newton (Macías et al., 2014) ya que es eficiente en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, converge muy rápidamente y proporciona una muy buena precisión en los resultados (Bravo Bolívar et al., 2005, Molina Villa, 2005).

El programa aplicativo “SMENLI” es una herramienta matemática diseñada para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Fue desarrollado utilizando la metodología orientada a objetos y métodos matemáticos iterativos, programados en C++. Y que tiene como Fortalezas:

Calidad: El software cumple con los indicadores de calidad del estándar ISO 9126 en un 96%, lo que indica una alta funcionalidad, fiabilidad, usabilidad, eficiencia, mantenibilidad y portabilidad.

Eficiencia: Entre los diferentes métodos iterativos implementados, el método de Newton y el método modificado de newton demostraron ser los más eficaces, ya que la convergencia del punto inicial a la solución se realiza en menos pasos iterativos en comparación con otros métodos.

Portabilidad: El software puede ejecutarse en cualquier tipo de computadora y en diversas versiones de Windows.

Limitaciones: Excepciones en la eficiencia, puesto que de algunos casos de ciertas funciones que forman parte del sistema de ecuaciones, el método cuasi Newton supera a los métodos mencionados.

Para encontrar una solución numérica de la ecuación de Burgers descrito en Quinga (2021) han desarrollado un programa en MATLAB habiendo elaborado un programa para un tipo de ecuación, así como, en (Gómez et al., 2012) implementaron un algoritmo en MATLAB para ecuaciones no lineales. Para el estudio del modelo de Lorenz descrito en (Garcia-Ferrer et al., 2017) ha sido necesario el conocimiento del programa MATHEMATICA, a nivel de usuario, para la caracterización de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

La solución de la ecuación de Colebrook & White (García et al., 2005) han utilizado el programa algebraico computacional de uso general MATHCAD. Asimismo, en (Palencia-González & García, 2020) se describe cómo utiliza el programa WOLFRAM ALPHA para cálculos numéricos. Por otro lado, en el lenguaje R también se puede resolver ecuaciones no lineales (Mora, 2016).

La comparación de SMENLI con otros programas de software, como Matlab, Mathematica, Mathcad y Wólfram Alpha, puede representar un desafío. Esto se debe a las diferencias inherentes en las capacidades y funcionalidades de cada uno de estos programas.

5. CONCLUSIONES

Resolver sistemas de ecuaciones no lineales de la forma V(X)=0 puede ser desafiante, requiriendo un análisis y limitación cuidadosos del comportamiento de las funciones involucradas. A diferencia de las ecuaciones lineales, no permiten una solución convencional mediante despeje o factorización. Este proceso puede ser manual o asistido por software, aunque este último puede requerir habilidades de programación.

SMENLI, un programa desarrollado para resolver estos sistemas, ofrece análisis de convergencia para métodos iterativos. Los métodos de Newton y Newton Modificado destacan por su eficiencia en la convergencia a la solución, gracias a su menor tiempo y número de iteraciones. Sin embargo, en situaciones excepcionales, el método Cuasi Newton puede ser superior.

Con base en la experiencia, se prevé que la eficiencia de los métodos y SMENLI puede mejorarse en el futuro, incluso reescribiendo SMENLI en lenguajes de programación interpretativos como Python para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

Conflicto de intereses / Competing interests:

Los autores declaran que no incurre en conflictos de intereses.

Rol de los autores / Authors Roles:

Luis Venturo: Conceptualización, análisis formal, investigación, administración del proyecto, recursos, visualización, escritura-preparación del borrador original, escritura-revisión y edición.

Irenio Chagua-Aduviri: Conceptualización, análisis formal, investigación, metodología, recursos.

Darssy Carpio: Conceptualización, análisis formal, investigación, escritura-preparación del borrador original, escritura-revisión y edición.

Fuentes de financiamiento / Funding:

Los autores declaran que no recibieron un fondo específico para esta investigación.

Aspectos éticos / legales; Ethics / legals:

Los autores declaran no haber incurrido en aspectos antiéticos, ni haber omitido aspectos legales en la realización de la investigación.

REFERENCIAS

Abramov, A. A. & Yukhno, L. F. (2015). A numerical method for solving systems of nonlinear equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, *55*(11), 1794–1801.

Acevedo, R., Arenas, F., & Pérez, R. (2008). El método DL para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, *16* (1), 23-36.

Andino Célleri, L. V., Viteri Ojeda, J. C., Andrade Álvarez, C. E., & Argüello Pazmiño, V. J. (2023). *La importancia de las matemáticas en la estructura de datos: optimización y eficiencia*. Alfa Publicaciones.

Bravo Bolívar, J. E., Botero Arango, A. J., & Botero Arbeláez, M. (2005). El método de Newton-Raphson - La alternativa del Ingeniero para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. *Scientia et Technica*, *11* (27), 221-224.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Análisis Numéricos*. Cengage Learning.

Centeno, A., & Niño, Z. (2009). Aproximación a la solución de sistemas de ecuaciones no lineales mediante la implementación del Algoritmo de Enjambre de Partículas. *Revista INGENIERÍA UC*, *16*(1), 19-23.

Chávez Esponda, D., Sabín Rendón, Y., Toledo Dieppa, V., & Jiménez Álvarez, Y. (2013). La Matemática: una herramienta aplicable a la Ingeniería Agrícola. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, *22*(3), 81–84. https://cutt.ly/Dw91jGeK

Cumsille, P., Ramírez Molina, J., & Rojas-Medar, M. A. (2010). Estudio numérico de sistemas de ecuaciones no lineales difusas. *Revista Integración, 28*(2), 153-172.

Demidovich, B. (1985a). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Editorial Parainfo.

Demidovich, B. (1985b). *Cálculo numérico fundamental.* Paraninfo.

Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia Año, 23* (1).

García, J., Morales, A., & Zaragoza, N. (2005). Determinación del gasto en sistemas de tuberías en serie utilizando el Mathcad. *Ingeniería, 9*(1), 19-24.

Garcia-Ferrer, F. V., Roldán, E., Silva, F., & de Valcárcel, G. J. (2017). Didactic application of numerical analysis in nonlinear dynamics: Lorenz model study. *Optica Pura y Aplicada, 50*(3), 197–219. https://doi.org/10.7149/OPA.50.3.49009

Gómez, L. A., Reyes, E. J., & Correa, C. R. (2012). Algoritmo para la solución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales mediante una estrategia de optimización global basada en análisis de intervalos. *Revista EIA*, (18), 77-89.

Gómez-gómez, M., Danglot-banck, C., & Velásquez-jones, L. (2009). *Matemáticas para la Computación.* Alfaomega.

Grisales-Aguirre, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado,* 14(2), 198–214.

Kelley, C. T. (2018). Numerical methods for nonlinear equations. *Acta Numerica*, 27(May), 207–287.

Macías C., M., Martínez, H. J., & Pérez, R. (2014). Sobre la convergencia de un método secante para ecuaciones matriciales no lineales. *Revista Integración*, *32*(2), 181-197.

Martínez, J. M. (2000). Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 124*(1–2), 97–121.

Molina Villa, F. A., (2005). Desarrollos alternativos en Raíces de Ecuaciones. *PROSPECTIVA, 3*(1), 38-44.

Mora F., W., (2016). Cómo utilizar R en métodos numéricos*. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 16*(1), 1-74.

Ortega, J. & Rheinboldt, W. (1970). *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Academic Press.

Ovalle Cerquera, D. E., Polanía Quiza, L. A., & Rodríguez Rodríguez, J. (2020). Retroalimentación: una componente para la no-linealidad. *Jangwa Pana, 19*(3), 476-492. https://doi.org/10.21676/16574923.3677

Palencia-González, F. J., & García, C. (2020). Un curso de Cálculo con Wolfram Alpha. *InnovaMath,* 3. https://doi.org/10.5944/pim.3.2020.26949

Quinga, S. D. (2021). Ecuación de Burgers viscosa, solución numérica mediante diferencias finitas y un método iterativo para sistemas no lineales de orden 4 basado en el Número Áureo. *Latin-American Journal of Physics Education,* 15(4).

Rheinboldt, W. C. (2000). Numerical continuation methods: A perspective. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *124*(1–2), 229–244.

Serrano Rugel, B., Aguilar, C., Cervantes, A., Molina, M. & Trujillo, V. (2020). Las matemáticas aplicadas como una oportunidad para preservar la salud. *Conrado, 16* (75), 272-279. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442020000400272&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Solís Zúñiga, A. G., Cordero Barbero, A., Torregrosa Sánchez, J. R., & Soto Quirós, J. P. (2021). Diseño y análisis de la convergencia y estabilidad de métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 21*(2), 1-27.

Vazquez, J. L. (2009). Las matemáticas y sus aplicaciones, ayer y hoy. Retos del futuro. E*ncuentros Multidisciplinares*, 4, 1–61.

Yamamoto, T. (2000). Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 124*(1–2), 1–23.

Yurij, E. (1987). Numerical Optimization Techniques. In J. Stoer (Ed.), *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems* (pp. 197–239). Academic Press.